Das Vektorprodukt

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v} \in R^3$.

Vektorprodukt oder Kreuzprodukt:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 & - & a_3 b_2 \\ a_3 b_1 & - & a_1 b_3 \\ a_1 b_2 & - & a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

Wir ordnen also zwei Vektoren einen weiteren Vektor zu.
Das Vektorprodukt ist also eine Abbildung: $R^3 \times R^3 \to R^3$.

Eigenschaften: Der berechnete Vektor steht auf den beiden gegebenen jeweils senkrecht:

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$ und $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$ (Alternativgesetz)

$\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right)$ und $\left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right) = \lambda^2 \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{c}\right)$ (Distributivgesetz)

Wichtig: Genau dann, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ gilt, sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig, also kollinear, die Verschiebungspfeile sind dann parallel. Somit existiert dann (und nur dann) ein $\mu \in R \setminus \{0\}$ mit $\vec{a} = \mu \cdot \vec{b}$.

Beispiele: a)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-2) & - & (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-1) & - & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 & - & 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & - & (-2) \\ 1 & - & (-6) \\ 6 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-4) & - & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-2) & - & 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 6 & - & (-3) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & - & 12 \\ -4 & - & (-4) \\ 6 & - & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Der Satz vom „Nullprodukt“, wie wir ihn vom „normalen“ Rechnen kennen, gilt nicht.)

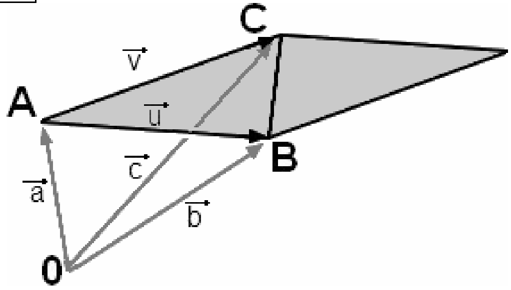
Flächeninhalte: Der **Flächeninhalt** des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms ergibt sich als: $\boxed{A_{Parallelogramm} = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$

Der **Flächeninhalt** des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Dreiecks ist:

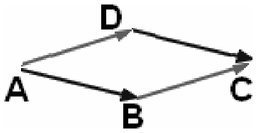
$$\boxed{A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

Vorsicht: Die „aufgespannten Vektoren“ sind nicht die Ortsvektoren der Eckpunkte, sondern die Verbindungsvektoren von einem Eckpunkt ausgehend zu zwei anderen Eckpunkten, also etwa:

$\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{v} = \vec{c} - \vec{a}$.



Bsp.: a) Gegeben sind die Punkte $A\,(1/1/0)$, $B\,(0/3/1)$, $C\,(-2/4/4)$ und $D\,(-1/2/3)$. Welcher Flächeninhalt hat das Parallelogramm ABCD?



Es gilt: $A_{Parallelogramm} = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \vec{d}-\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_{Parallelogramm} = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\cdot3-1\cdot1\\1\cdot(-2)-(-1)\cdot3\\(-1)\cdot1-2\cdot(-2)\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix}6-1\\-2-(-3)\\(-1)-(-4)\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+1^2+3^2} = \underline{\sqrt{35}\,(FE)} \approx \underline{5{,}92\,(FE)}$$

b) Welchen Flächeninhalte hat das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A\,(1/-1/7)$, $B\,(1/5/11)$ und $C\,(3/4/-5)$?

Es gilt: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

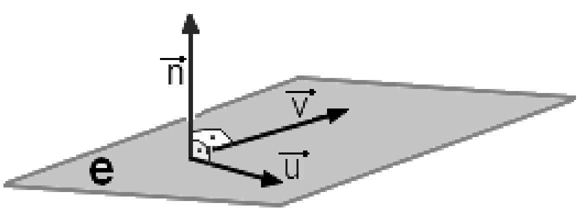
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\5\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\-12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\5\\-12\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}6\cdot(-12)-4\cdot5\\4\cdot2-0\cdot(-12)\\0\cdot5-6\cdot2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-72-20\\8-0\\0-12\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-92\\8\\-12\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-92)^2+8^2+(-12)^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8672}\,(FE)} \approx \underline{46{,}56\,(FE)}$$

Normalenvektor: Ein Vektor $\vec{n}\in R^3\setminus\left\{\vec{0}\right\}$ heißt **Normalenvektor** einer Ebene e, wenn er auf dieser senkrecht steht.



Wird eine Ebene e von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ „erzeugt“, so berechnet sich ein Normalenvektor $\vec{n}$ als:

$$\boxed{\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}}\,.$$

Jedes Vielfache $\mu\cdot\vec{n}$ von $\vec{n}$ mit $\mu\in R\setminus\{0\}$ ist auch ein Normalenvektor dieser Ebene.