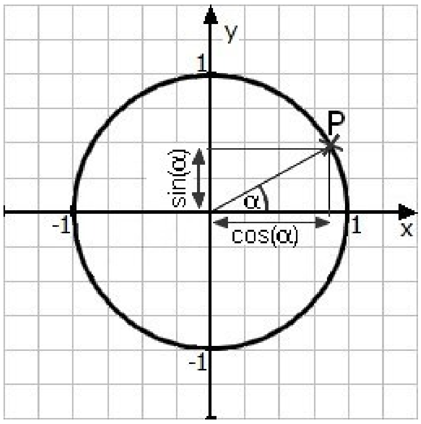
Trigonometrische Funktionen 1

Die **trigonometrischen Funktionen** werden auch **Winkelfunktionen** genannt.

	Sinus	sin(x)	*Umkehrfunktion:*	**Arkussinus**	arcsin(x)	$\sin^{-1}(x)$
	Kosinus	cos(x)	*Umkehrfunktion:*	**Arkuskosinus**	arccos(x)	$\cos^{-1}(x)$
	Tangens	tan(x)	*Umkehrfunktion:*	**Arkustangens**	arctan(x)	$\tan^{-1}(x)$
Seltener:	**Kotangens**	cot(x)	*Umkehrfunktion:*	**Arkuskotangens**	arccot(x)	$\cot^{-1}(x)$

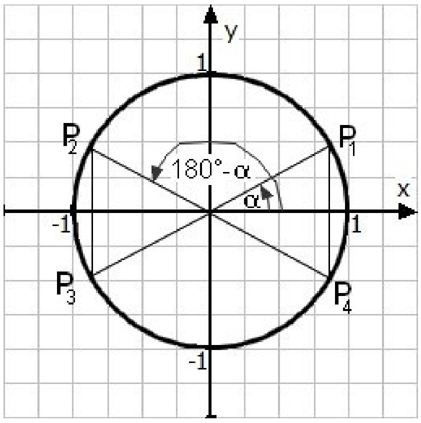
Wir können jedem Winkel α einen Punkt P auf der Kreislinie des Einheitskreises (dessen Radius eine Längeneinheit ist) zuordnen. Für die Koordinaten dieses Punktes P setzen wir fest:

$$\boxed{P\left(x_0 / y_0\right) = \left(\cos(\alpha) / \sin(\alpha)\right)}$$



Da wir jedem Winkel α (**Gradmaß**, „deg") eindeutig die Länge des entsprechenden Kreisbogens (beginnend in (1/0), wir bewegen uns im **mathematischen Drehsinn**, d.h. *gegen* den Uhrzeigersinn) zuordnen können, sind Sinus und Kosinus auch über diese Bogenlängen x (**Bogenmaß**, „rad") definierbar.

Die Zuordnungen:	0°	$\leftrightarrow$	0	
	90°	$\leftrightarrow$	$\pi/2$	
	180°	$\leftrightarrow$	π	
	360°	$\leftrightarrow$	2π	(= voller Kreisumfang)



Aus der Zeichnung folgt, dass für die Winkel zwischen 0° und 180° gilt:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Analog erkennen wir für Winkel zwischen 180° und 270°:

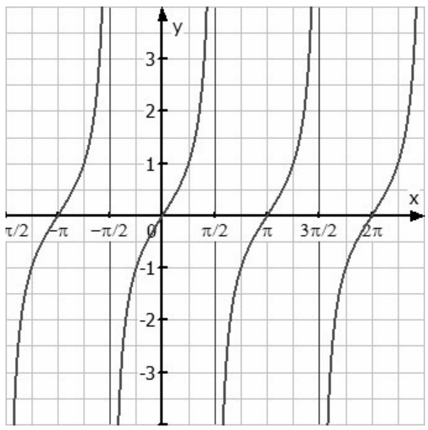
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

Und schließlich für Winkel zwischen 270° und 360°:

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(360° - \alpha) = \cos(\alpha)$$

Die dritte trigonometrische Funktion ist der **Tangens**:

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$



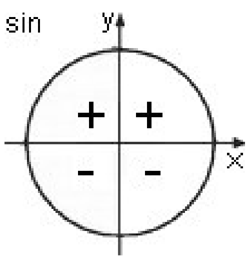
Wir sehen, dass der Tangens an den Nullstellen der cos-Funktion nicht definiert ist.

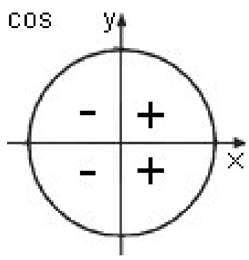
Für definierte Winkel α gilt: $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

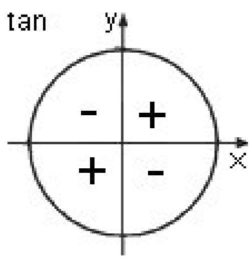
beziehungsweise: $\tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$

<u>Selten</u> benutzt wird der **Kotangens**: $\boxed{\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$

Für die Vorzeichen der Funktionen gelten folgende Diagramme:







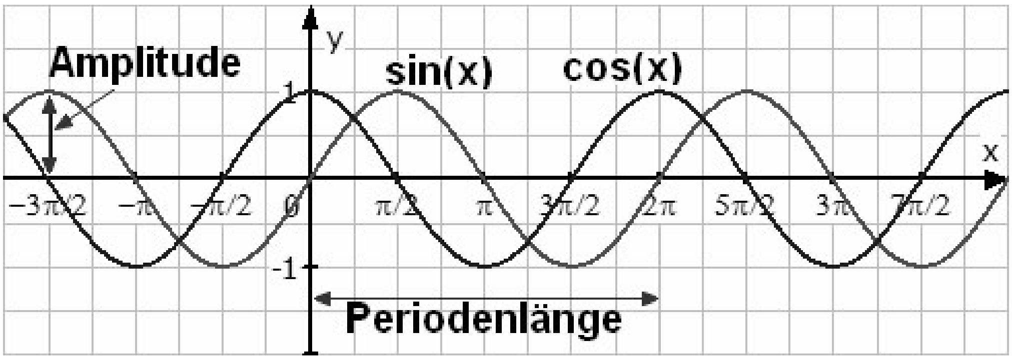
Durch das „Weiterdrehen“ (über 360° / 2π hinaus) ergeben sich für alle ganzzahligen $k \in \mathbb{Z}$ folgende Regeln:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin(\alpha) \qquad \cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos(\alpha) \qquad \tan(\alpha + k \cdot 180°) = \tan(\alpha)$$

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x) \qquad \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x) \qquad \tan(x + k \cdot \pi) = \tan(x)$$

Außerdem gilt für alle Winkel der so genannte „**trigonometrische Pythagoras**“: $\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$

Die Sinus- und Kosinusfunktion



Die Zusammenhänge zwischen Graph und Funktionsgleichung:	$f(x) = a \cdot \sin(bx - c) + d$ $f(x) = a \cdot \cos(bx - c) + d$	$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - u)) + d$ $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - u)) + d$
Amplitude	$\lvert a \rvert$	$\lvert a \rvert$
Periodenlänge	$p = \frac{360°}{\lvert b \rvert} = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	$p = \frac{360°}{\lvert b \rvert} = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$
x-Verschiebung	$u = \frac{c}{b}$	u
y-Verschiebung	d	d
Wertebereich	$[\, d - \lvert a \rvert \,;\, d + \lvert a \rvert \,]$	$[\, d - \lvert a \rvert \,;\, d + \lvert a \rvert \,]$

Für die Amplitude a haben wir für $0 < \lvert a \rvert < 1$ eine „Pressung“ und für $\lvert a \rvert > 1$ eine Dehnung (in y-Richtung).
Ist $a < 0$, so haben wir zusätzlich eine Spiegelung an der x-Achse.

Wichtige Werte:

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	-1	0
Merkregel Sinus	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$				
Kosinus	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0	1
Tangens	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.def.	-1	0	n.def	0

Außerdem gelten

$$\sin(n\alpha) = \cos(n\alpha - 90°) \qquad \cos(n\alpha) = \sin(n\alpha + 90°)$$

$$\sin(nx) = \cos\left(nx - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \cos(nx) = \sin\left(nx + \frac{\pi}{2}\right)$$