Stetigkeit von Funktionen

Situation und Definition

Es sei $f: D \to R;\ x \mapsto f(x)$ eine auf der $D \subseteq R$ definierte Funktion.

a) Die Funktion f, die in einem Punkt x_0 und in einer Umgebung von x_0 definiert ist, heißt **(lokal) stetig in x_0**, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert.

Existieren der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert, so müssen diese übereinstimmen: $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

(2) Der Grenzwert gegen x_0 ist gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

b) Gilt (mindestens) eine der Bedingungen aus a) **nicht**, so heißt f **unstetig in x_0** oder **nicht stetig in x_0**.

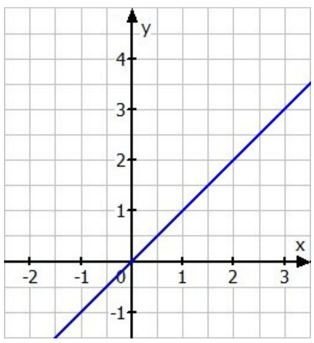
c) An einer **Definitionslücke** (das sind einzelne Punkte, die nicht zur Definitionsmenge gehören), kann keine Aussage bezüglich der Stetigkeit gemacht werden.
Daher ist eine Funktion an einer solchen Stelle **weder stetig noch unstetig**.
(siehe Beispiel 5)

d) An **isolierten Stellen** x_0 der Definitionsmenge D (Stellen, die zu D gehören, aber in D keine Umgebungen besitzen) sind Funktionen per Definition **stetig**. *(siehe Bsp. 6)*

e) Eine Funktion heißt **(global) stetig (auf ihrer Definitionsmenge D)**, falls sie in allen Punkten der Definitionsmenge D lokal stetig ist (wenn also keine Unstetigkeitsstellen im Definitionsbereich existieren).

Graphische Interpretation: Der Graph kann **ohne Absetzen** gezeichnet werden.

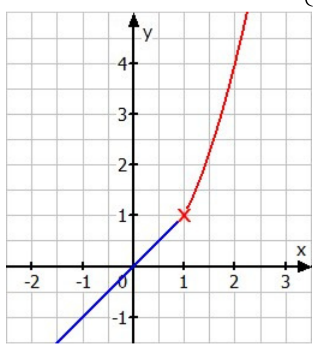
Beispiel 1: $f: D = R \to R,\ x \mapsto x$



An allen Stellen existiert der Grenzwert und stimmt jeweils mit dem Funktionswert überein.

Die Funktion ist an jeder Stelle (lokal) stetig und somit auf ganz R (global) stetig.

Beispiel 2: $f: D = R \to R,\ x \mapsto \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$



Die Stetigkeit ist an allen Stellen außer $x_0 = 1$ direkt ersichtlich.

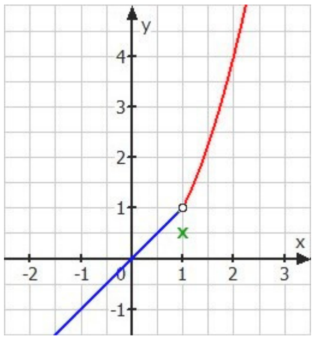
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$,

$f(1) = 1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$

$\Rightarrow$ Stetig in $x_0 = 1 \quad \Rightarrow$ Stetig auf R

Beispiel 3:

$$f: D=\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & x<1 \\ 0{,}5 & x=1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$$



Die Stetigkeit ist an allen Stellen außer $x_0 = 1$ direkt ersichtlich.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1,\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$

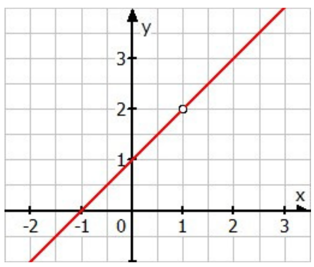
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

Aber: $f(1) = 0{,}5 \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

$\Rightarrow$ Unstetig in $x_0 = 1$, unstetig auf $\mathbb{R}$

Beispiel 5: $f: D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = x+1$$



Interessant ist die Definitionslücke, an allen anderen Stellen ist die Stetigkeit von f direkt ersichtlich.

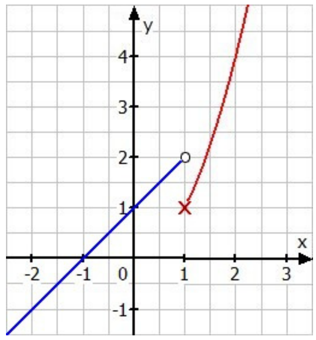
Nach der Stetigkeits-Definition ist f(x) an der Definitionslücke $x_0 = 1$ weder stetig noch unstetig.

Diese Stelle lässt sich **stetig beheben**. Es entsteht dadurch die stetige Funktion:

$$f^*: D = \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Beispiel 4:

$$f: D=\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x+1 & x<1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$



Die Stetigkeit ist an allen Stellen außer $x_0 = 1$ direkt ersichtlich.

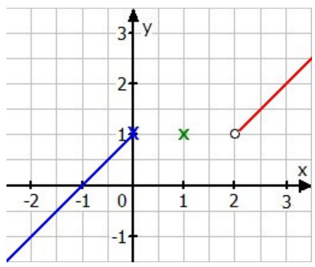
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x+1 = 2$ und $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$,

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ GW existiert nicht.

$\Rightarrow$ Unstetig in $x_0 = 1$, also unstetig auf $\mathbb{R}$

Beispiel 6: $f: D = \mathbb{R} \setminus (]0;1[\cup]1;2]) \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 1 & x = 1 \\ x-1 & x > 2 \end{cases}$$



Die Stetigkeit ist an allen Stellen außer $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ direkt ersichtlich.

$x_1 = 0$:

Der (nur linksseitig existierende) Grenzwert ist gleich dem Funktionswert, also stetig.

$x_2 = 1$:

Isolierte Stelle, also ist f per Definition stetig.

$x_3 = 2$:

Da diese Stelle nicht zum Definitionsbereich gehört, ist keine Aussage möglich.