Reihen

Allgemeine Definition:

Zu einer Folge $a_n = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ definieren wir eine weitere Folge:

$\boxed{s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$ oder abgekürzt: $\boxed{s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i}$ („Summe von i=1 bis n über a_i“).

Eine solche Folge nennen wir **Reihe**. Rekursiv gilt: $\boxed{s_n = s_{n-1} + a_n}$

Es ist: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ und so weiter.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right) \Rightarrow s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow s_1 = a_1 = 1$, $s_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$,

$\Rightarrow \underline{s_n = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \ldots\right)}$

Arithmetische Reihe:

Zu einer gegebenen arithmetischen Folge $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ definieren wir die **arithmetische Reihe:** $\boxed{s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1) \cdot d)}$.

Für diese gilt die **Summenformel**: $\boxed{s_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)}$

Beispiel: Wir suchen die Summe der ersten 10 Glieder der Folge: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$.

Es ist: $n = 10$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 1 \cdot 2 = 5$, $a_{10} = 3 + 9 \cdot 2 = 21$

$\Rightarrow s_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 3 + 5 + \ldots + 21 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (3 + 21) = \underline{120}$

Geometrische Reihe:

Zu einer gegebenen geometrischen Folge $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ definieren wir die **geometrische Reihe**: $\boxed{s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_1 \cdot q^{i-1})}$.

Für diese gilt die **Summenformel**: $\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$ (Im Zähler steht nur das n im Exponent!)

Beispiel: Wir suchen die Summe der ersten 10 Glieder der Folge: $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Es ist: $n = 10$, $q = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 5 \cdot 2 = 10$, $a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2560$

$\Rightarrow s_{10} = 5 + 10 + \ldots + 2560 = 5 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 5 \cdot \frac{1024 - 1}{1} = 5 \cdot 1023 = \underline{5115}$