Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ mit $a, b, c \in R;\ a \neq 0$ heißt **quadratische Gleichung**.

Reinquadratische Gleichungen

Ist $b = 0$, so haben wir eine **reinquadratische Gleichung**: $\boxed{a \cdot x^2 + c = 0}$.
Diese lässt sich umformen in $x^2 = e$.

Diese hat für
- $\underline{e > 0}$ die beiden Lösungen: $x_1 = -\sqrt{e}$ und $x_2 = +\sqrt{e}$,
- $\underline{e = 0}$ eine einzige Lösung: $x = 0$,
- $\underline{e < 0}$ keine Lösung $L = \underline{\{\ \}}$.

Beispiel: $3x^2 - 48 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 48 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 16$
$\Leftrightarrow \quad x_1 = -\sqrt{16} = \underline{-4}; \quad x_2 = +\sqrt{16} = \underline{+4} \quad \Rightarrow \quad L = \underline{\{-4; +4\}}$

Quadratische Gleichungen ohne Absolutglied

Als **Absolutglied** bezeichnen wir den „Summanden ohne x“, also $c = 0$. Gleichungen der Form $\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x = 0}$ lösen wir dadurch, dass wir x^2 zunächst **normieren**, das heißt durch a dividieren, und danach die Unbekannte x ausklammern. Wir erhalten ein Produkt, dessen Ergebnis 0 ist. Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn einer der Faktoren 0 ist, können wir die Lösungen aus den Faktoren ablesen.

Beispiel: $2x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x_1 = \underline{0}; \quad x_2 = \underline{-2} \quad \Rightarrow \quad L = \underline{\{-2; 0\}}$

Allgemeine quadratische Gleichungen: Die p-q-Formel

Jede quadratische Gleichung können wir in der Form $\boxed{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ darstellen. Um sie zu lösen, **normieren** wir sie zuerst. Das heißt, dass wir durch a dividieren, so dass der Koeffizient des quadratischen Summanden 1 wird. Die Gleichung liegt nun in der Form $\boxed{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ vor. Diese Gleichung lösen wir mit der mit der **p-q-Formel**:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

>>> Vorsicht mit den Vorzeichen ! <<<

Je nach dem, welches Vorzeichen der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen hat, bekommen wir zwei, eine oder keine Lösung.

Beispiel: $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \cdot x - 12 = 0$ Es ist: $p = -4$, $q = -12$.
$\Rightarrow \quad x_{1,2} = +2 \pm \sqrt{2^2 - (-12)} = 2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4$
$\Rightarrow \quad x_1 = 2 - 4 = \underline{-2}$ und $x_2 = 2 + 4 = \underline{+6}$
$\Rightarrow \quad L = \underline{\{-2; +6\}}$

Anmerkung: Faktorisiert ergibt sich:

$$2 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 24 = 2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x - 12) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 6)$$