Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Definitionen:

a) Es seien $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ Vektoren und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$ reelle Zahlen.

Ein Vektor der Form $\vec{b} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{a_i}$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\overrightarrow{a_1}$ bis $\overrightarrow{a_n}$ mit den Koeffizienten λ_1 bis λ_n.

b) Die <u>immer</u> existierende Linearkombination $\vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + 0 \cdot \overrightarrow{a_n}$ heißt **triviale** L**inearkombination des Nullvektors**.

c) Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ heißen **linear abhängig**, wenn es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors gibt.

Das heißt exakt:

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ heißen **linear abhängig** genau dann, wenn die Vektorgleichung $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ eine Lösung hat, bei der <u>mindestens</u> eine der reellen Zahlen λ_i von Null verschieden ist.

d) Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ heißen **linear unabhängig** genau dann, wenn sich der Nullvektor <u>nur</u> als triviale Darstellung dieser Vektoren darstellen lässt.

Das heißt exakt:

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ heißen **linear unabhängig** genau dann, wenn die Vektorgleichung $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ nur lösbar ist, wenn <u>alle</u> reellen Zahlen λ_i Null sind ($\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$).

Beispiele:

a) Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ sind <u>linear abhängig</u>.

Denn es ist „direkt" zu sehen, dass gilt: $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Durch Lösen eines linearen Gleichungssystems aus 3 Gleichungen und 3 Variablen ergibt sich, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>linear unabhängig</u> sind.

Es folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: Es existiert also nur die triviale Darstellung des Nullvektors.

c) Ebenfalls durch Lösen eines linearen Gleichungssystems aus 3 Gleichungen und 3 Variablen ergibt sich, die nichttriviale Darstellung $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ <u>linear abhängig</u>.

Bemerkungen und Eigenschaften:

Es seien $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$, $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen.

(1) Der Nullvektor $\vec{0}$ ist linear abhängig. Denn: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) Jeder Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist linear unabhängig.
Denn: Es existiert <u>kein</u> $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

(3) <u>Zwei</u> Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Verschiebungspfeile parallel sind. Sie werden **kollinear** genannt.
Umgekehrt: <u>Zwei</u> Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre Verschiebungspfeile nicht parallel sind.

(4) <u>Drei</u> Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn ihre Verschiebungspfeile in einer Ebene liegen. Sie werden **komplanar** genannt.
Umgekehrt: <u>Drei</u> Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihre Verschiebungspfeile nicht in einer Ebene liegen.

(5) Sind $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ linear abhängig, so sind auch $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \vec{b}$ linear abhängig.
Denn: Wenn $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ nichttriviale Darstellung,
dann auch: $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$ nichttriviale Darstellung.

(6) Sind drei linear unabhängig Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben, so sind jeweils zwei dieser drei Vektoren ebenfalls linear unabhängig. (ohne Beweis)

(7) Ist $\vec{b}$ als Linearkombination von $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ darstellbar, dann sind die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ und $\vec{b}$ linear abhängig.
Denn: Es ist $\vec{b} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$, wobei nicht alle $\lambda_i = 0$ sind.
Dann ist $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} - \vec{b} = \vec{0}$ eine nichttriviale Darstellung.

(8) Für zwei oder mehr linear abhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gilt, dass mindestens einer dieser Vektoren eine Linearkombination der anderen ist. (ohne Beweis)

(9) Jede Menge von Vektoren, zu denen der Nullvektor gehört, ist linear abhängig.
(Diese Aussage sollte direkt ersichtlich sein… ☺)

(10) Jede aus mindestens 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ bestehende Menge ist linear abhängig. (ohne Beweis)

(11) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig, genau dann, wenn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. (ohne Beweis)
$\vec{a}$ $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig, genau dann, wenn $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$. (ohne Beweis)