Kombinatorik

Es seien n und k natürliche Zahlen mit $k \le n \neq 0$.

Permutationen von A / Permutationen aus A

Für eine „<u>Geordnete</u> n-Auswahl einer n-elementigen Menge A <u>ohne</u> Wiederholungen" (sogenannte **Permutationen)** haben wir $\boxed{n!}$ Möglichkeiten.

- **Urnenmodell:**
  Es gibt beim Ziehen aller n unterscheidbarer Kugeln aus einer Urne ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge $n!$ verschiedene Möglichkeiten.
- **Kästchen- bzw. Schubladenmodell:**
  Wir können n durchnummerierte Kugeln auf $n!$ verschiedene Arten in Kästchen verteilen, wobei Mehrfachbesetzungen nicht erlaubt sind sind.
- **Beispiele:**
  - Sechs Personen können sich auf $6! = 720$ Möglichkeiten in einer Reihe aufstellen.
  - Es gibt $8! = 40\,320$ Möglichkeiten, die acht Teilnehmer eines 100-m-Laufes auf die acht Bahnen zu verteilen.

k-Tupel aus A / Produktmenge

Für eine „<u>Geordnete</u> k-Auswahl einer n-elementigen Menge A <u>mit</u> Wiederholungen" (sogenannte **k-Tupel)** haben wir $\boxed{n^k}$ Möglichkeiten.

- **Urnenmodell:**
  Es gibt beim Ziehen von k unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, mit Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge n^k Möglichkeiten.
- **Kästchen- bzw. Schubladenmodell:**
  Wir können k durchnummerierte Kugeln auf n^k verschiedene Arten in n Kästchen verteilen, wobei Mehrfachbesetzungen zulässig sind.
- **Beispiele:**
  - Ein Byte besteht aus 8 Bit. Jedes Bit ist entweder eine „0" oder eine „1".
    Es ergeben sich insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ unterscheidbare Zeichen, die mit 1 Byte gespeichert / codiert werden können.
  - Bei „Wer wird Millionär" gibt es 15 Fragen mit je 4 Antwortmöglichkeiten, von denen je eine stimmt. Die Redaktion (bzw. deren Software) hat somit $4^{15} = 1\,073\,741\,824$ Möglichkeiten, die richtigen Antworten zu verteilen.

k-Permutationen aus A

Für eine „<u>Geordnete</u> k-Auswahl einer n-elementigen Menge A <u>ohne</u> Wiederholungen" (sogenannte **k-Permutationen)** haben wir $\boxed{(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten (gelesen „n Index k").

- **Urnenmodell:**
  Es gibt beim Ziehen von k unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge $(n)_k$ Möglichkeiten.

- **Kästchen- bzw. Schubladenmodell:**
  Wir können k durchnummerierte Kugeln auf $(n)_k$ verschiedene Arten in n Kästchen verteilen, wobei Mehrfachbesetzungen nicht erlaubt sind.

- **Beispiele:**
  - Um unter 8 Startern die Medaillen für die ersten drei Plätze zu verteilen gibt es $(8)_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$ Möglichkeiten.
    Alternative Argumentation: Für die Goldmedaille stehen 8 Sportler zur Verfügung, für Silber noch 7 und für Bronze 6. Also: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \quad (n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1))$.
  - Um 6 Personen auf 9 Einzelzimmer zu verteilen, gibt es $(9)_6 = 60\,480$ Möglichkeiten.

k-Teilmenge aus A

Für eine „Ungeordnete k-Auswahl einer n-elementigen Menge A ohne Wiederholungen“ (**Teilmengen)** haben wir $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$ Möglichkeiten (Binomialkoeffizient, gelesen „n über k“ oder „k aus n“. Etwa „6 aus 49“, das bekannte **Lotto-Prinzip)**.

- **Urnenmodell:**
  Es gibt beim Ziehen von k unterscheidbaren (etwa durchnummerierten) Kugeln aus n Kugeln, ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

- **Kästchen- bzw. Schubladenmodell:**
  Wir können k von n gleichartigen Kugeln auf $\binom{n}{k}$ Arten in k unterscheidbare Kästchen verteilen, wobei Mehrfachbesetzungen nicht erlaubt sind.

- **Beispiele:**
  - Zahlenlotto „6 aus 49“: Jede Kugel kann nur einmal gezogen werden, die Reihenfolge ist unerheblich. Es gibt $\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13\,983\,816$ Tippvarianten.
  - 50 Teilnehmer bewerben sich bei einer Verlosung um 5 Eintrittskarten für ein Konzert. Es gibt $\binom{50}{5} = 2\,118\,760$ verschieden Möglichkeiten.

n-Tupel mit gleichen Elementen („Tennessee“ bzw. „Mississippi“-Aufgaben, Anagramme)

Wir haben n Objekte (Kugeln, Bücher, Schokolade) in k Gruppen mit gleicher Eigenschaft (Farbe, Autor, Sorte). Von Eigenschaft k gibt es n_k Objekte, wobei $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ gilt.

Diese n Objekte lassen sich auf $\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$ Arten in eine Reihe legen / sortieren.

Bsp.:
- 5 Vollmilch-, 4 Nuss-, 3 Marzipan- und 2 Tafeln Nougat-Schokolade lassen sich auf $\frac{14!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = 2\,522\,520$ Arten in eine Reihe legen / „vernaschen“.
- Aus dem Wort TENNESSEE lassen sich $\frac{9!}{\underset{1xT}{1!} \cdot \underset{4xE}{4!} \cdot \underset{2xN}{2!} \cdot \underset{2xS}{2!}} = 3\,780$ verschiedene Worte („Anagramme“) bilden.