Partielle Integration

Die Situation und die Regel:

Besteht eine Funktion, zu der wir eine Stammfunktion suchen, aus einem Produkt zweier Funktionen $f(x)\cdot g'(x)$, wobei wir von der einen die Stammfunktion $g(x)$ und von der anderen die Ableitung $f'(x)$ kennen, so kann uns die Methode der Partiellen Integration weiterhelfen. Sie folgt direkt aus der Produktregel der Differentialrechnung.

Die beiden Funktionen f und g seien auf einem Intervall $[a;b]\subset \mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitungen seien dort stetig.

Dann gilt für das <u>unbestimmte Integral</u>, also für die Bestimmung der <u>Stammfunktion</u>:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx \;=\; f(x)\cdot g(x) \;-\; \int f'(x)\cdot g(x)\,dx \;+\; c\,; \quad c\in \mathbb{R}}$$

Das <u>bestimmte Integral</u> (wir haben also Integrationsgrenzen) berechnet sich wie Folgt:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx \;=\; \left[\, f(x)\cdot g(x)\,\right]_a^b \;-\; \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Beispiele:

1. Wir suchen die Stammfunktion von $h(x) = x\cdot\cos(x)$.

Wir setzen: $f(x) = x$ und $g'(x) = \cos(x)$.

Dann ist: $f'(x) = 1$ und $g(x) = \sin(x)$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int x\cdot\cos(x)\,dx \quad = \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \\ &= f(x)\cdot g(x) \;-\; \int f'(x)\cdot g(x)\,dx \;+\; c \\ &= x\cdot\sin(x) \;-\; \int 1\cdot\sin(x)\,dx \;+\; c \\ &= x\cdot\sin(x) \;-\; (-\cos(x)) \;+\; c \\ &= \underline{x\cdot\sin(x)+\cos(x)+c} \quad \text{mit} \quad c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Leiten wir die gefundene Stammfunktion ab, können wir uns überzeugen, dass sie stimmt (oder vielleicht doch falsch ist).

2. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot\cos(x)\,dx \;=\; ?$

Mit Beispiel 1 ergibt sich:

$$\int_0^{\pi} x\cdot\cos(x)\,dx \;=\; \left[\,x\cdot\sin(x)\,\right]_0^{\pi} \;-\; \int_0^{\pi}\sin(x)\,dx \;=\; \left[\,x\cdot\sin(x)\,\right]_0^{\pi} \;-\; \left[\,-\cos(x)\,\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[\,x\cdot\sin(x)+\cos(x)\,\right]_0^{\pi} \;=\; \Big(\pi\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}+\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\Big)-\Big(0\cdot\underbrace{\sin(0)}_{=0}+\underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big)$$

$$= (0+(-1))-(0+1) \;=\; \underline{-2}$$

3. $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x)\,dx = ?$

Manchmal müssen wir die partielle Integration mehrfach benutzen um unser Ziel zu erreichen. In diesem Beispiel führt das zweimalige Anwenden zum Erfolg:

Wir setzen: $f_1(x) = x^2$ und $g_1'(x) = \cos(x)$.

Dann ist: $f_1'(x) = 2x$ und $g_1(x) = \sin(x)$.

Es folgt: $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos(x)\,dx = \left[x^2 \cdot \sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin(x)\,dx$

Wir setzen: $f_2(x) = 2x$ und $g_2'(x) = \sin(x)$.

Dann ist: $f_2'(x) = 2$ und $g_2(x) = -\cos(x)$.

Und weiter:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos(x)\,dx = \left[x^2 \cdot \sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \sin(x)\,dx$$

$$= \left[x^2 \cdot \sin(x)\right]_0^{\pi} - \left(\left[2x \cdot (-\cos(x))\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \cdot (-\cos(x))\,dx \right)$$

$$= \left[x^2 \cdot \sin(x)\right]_0^{\pi} - \left(\left[-2x \cdot \cos(x)\right]_0^{\pi} + \left[2\sin(x)\right]_0^{\pi} \right)$$

$$= \left[x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \cdots = -2\pi - 0 = \underline{-2\pi}$$

4. Manchmal reproduziert sich bei der partiellen Integration das gesuchte Integral:

Wir suchen die Stammfunktion zur Funktion $h(x) = e^x \cdot \cos(x)$.

Wir setzen: $f_1(x) = e^x$ und $g_1'(x) = \cos(x)$.

Dann ist: $f_1'(x) = e^x$ und $g_1(x) = \sin(x)$.

Es folgt: $H(x) = \int e^x \cdot \cos(x)\,dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx + c_1$

Wir setzen: $f_2(x) = e^x$ und $g_2'(x) = \sin(x)$.

Dann ist: $f_2'(x) = e^x$ und $g_2(x) = -\cos(x)$.

Und weiter:

$$\underline{\underline{\int e^x \cdot \cos(x)\,dx}} = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x)\,dx + c_1$$

$$= e^x \cdot \sin(x) - \left(e^x \cdot (-\cos(x)) - \int e^x \cdot (-\cos(x))\,dx + c_2\right) + c_1$$

$$= e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) - \underline{\underline{\int e^x \cdot \cos(x)\,dx}} + c^*$$

Somit: $2 \cdot \int e^x \cdot \cos(x)\,dx = e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) + c^*$

Insgesamt: $H(x) = \int e^x \cdot \cos(x)\,dx = \underline{\frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)) + c}$, $c \in R$.