Eigenschaften von Integralen

Es seien $a, b, c \in D \subseteq R$ Zahlen aus den jeweiligen Definitionsbereichen integrierbarer Funktionen f und g. Außerdem seien $r, s \in R$.

Allgemeine Eigenschaften

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^a (-f(x))\,dx}$$

Linearität

Es gilt:

$$\boxed{\int_a^b (r \cdot f(x) + s \cdot g(x))\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx + s \cdot \int_b^c g(x)\,dx}$$

Beispiel:

$$\int_{0,5}^{1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sin(x)}\right)dx + \int_{0,5}^{1} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sin(x)}\right)dx = \int_{0,5}^{1} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sin(x)} + \frac{2}{3} - \frac{1}{\sin(x)}\right)dx = \int_{0,5}^{1} 1\,dx = \cdots = \underline{0,5}$$

Intervalladditivität

Es gilt:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$$

Beispiele:

1. $$\int_0^2 (2x-2)\,dx + \int_2^5 (2x-2)\,dx = \int_0^5 (2x-2)\,dx = \left[x^2 - 2x\right]_0^5 = (5^2 - 2 \cdot 5) - (0) = \underline{15}$$

2. Da $|u| = \begin{cases} -u & \text{für } u < 0 \\ +u & \text{für } u \geq 0 \end{cases}$ ist $$\int_{-1}^{2} |u|\,du = \int_{-1}^{0} (-u)\,du + \int_{0}^{2} (+u)\,du = \cdots = \underline{2,5}$$

Symmetrieeigenschaften

Sind die Integrationsgrenzen symmetrisch (von $-a$ bis $+a$) und ist die Funktion $f(x)$ <u>achsensymmetrisch</u> zur y-Achse, so gilt:

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^{+a} f(x)\,dx}$$

Sind die Integrationsgrenzen symmetrisch (von $-a$ bis $+a$) und ist die Funktion $f(x)$ <u>punktsymmetrisch</u> zum Ursprung, so gilt:

$$\boxed{\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0}$$

Beispiele:

1. $$\int_{-7}^{7} (4x^3 - 5x)\,dx = \underline{0}$$ nur ungerade Exponenten, also punktsymmetrisch zum Ursprung

2. $$\int_{-2}^{2} |x|\,dx = 2 \cdot \int_0^2 |x|\,dx = 2 \cdot \int_0^2 x\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \cdots = \underline{4}$$ achsensymmetrisch zur y-Achse

3. $$\int_{-1}^{1} \left(23x^5 - 17,5x^3 + \frac{481}{127}x\right)dx = \underline{0}$$ nur ungerade Exponenten, also pktsymm. zum Ursprung