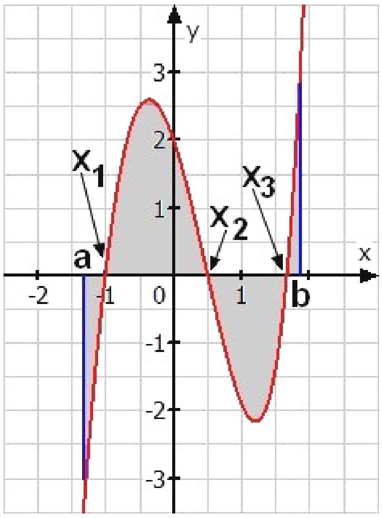
Flächenberechnungen mit Integralen

Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse



Es sei eine stetige Funktion $f(x)$ gegeben und ein Intervall $[a;b]$.
Gesucht wird der (nicht orientierte) Inhalt der Fläche, die vom Schaubild der Funktion $f(x)$, der x-Achse und den beiden Geraden $x = a$ und $x = b$ berandet wird.

Algorithmus:

1. Wir berechnen die Nullstellen x_i der Funktion im Intervall $[a;b]$, so dass für die Integrationsgrenzen gilt $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$.
2. Wir bestimmen die Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$.
3. Nun berechnen wir den gesuchten Flächeninhalt:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx \right|$$

Beispiel: *(Die obige Zeichnung gehört <u>nicht</u> zu diesem Beispiel!)*

Gegeben: Die Funktion $f(x) = x^3 + 1$ und das Intervall $[-2;1]$, d.h. die Grenzen -2 und 1.

1. Nullstelle(n): $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

   Somit haben wir die Integrationsgrenzen: $a = -2 \; < \; x_1 = -1 \; < \; b = 1$

2. Stammfunktion: $f(x) = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$

3. $$A = \left| \int_{-2}^{-1} \left(x^3 + 1\right) dx \right| + \left| \int_{-1}^{+1} \left(x^3 + 1\right) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_{-1}^{+1} \right|$$

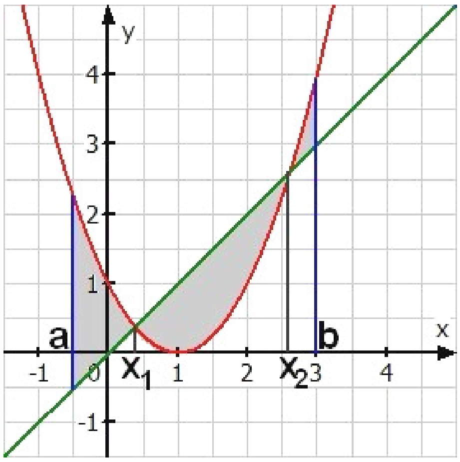
$$= \left| \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + (-1) \right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 + (-2) \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 + (-1) \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{4} - 1 \right) - \left(\frac{16}{4} - 2 \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} - 1 - 4 + 2 \right| + \left| \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + 1 \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} - 3 \right| + |2| = \left| -\frac{11}{4} \right| + |2| = \frac{11}{4} + \frac{8}{4} = \underline{\frac{19}{4}}$$

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen



Es sind zwei stetige Funktion $f(x)$ und $g(x)$ gegeben und ein Intervall $[a;b]$. Gesucht ist der (nicht orientierte) Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen und den Geraden $x=a$ und $x=b$ berandet wird.

Algorithmus:

1. Wir berechnen die Schnittpunkte x_i der beiden Funktionen im Intervall $[a;b]$ mit der Formel $f(x)=g(x)$. Für die Integrationsgrenzen gilt: $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$. *(Nullstellen werden nicht benötigt)*

2. Wir bestimmen zur Differenz der beiden Funktionen $h(x)=f(x)-g(x)$ die Stammfunktion $H(x)=F(x)-G(x)$.

3. Nun bestimmen wir den gesuchten Flächeninhalt:

$$A = \left| \int_a^{x_1} (f(x)-g(x))\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))\,dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} (f(x)-g(x))\,dx \right|$$

Beispiel:

(Die obige Zeichnung gehört nicht zu diesem Beispiel!)

Gegeben: Die Funktion $f(x)=x^2-2x$ und $g(x)=x$ und das Intervall / die Grenzen $[0;4]$.

1. Schnittpunkt(e) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x=x \Leftrightarrow x^2-3x=0$

$\Leftrightarrow x\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ und $x_2=3$

Es ergeben sich die Integrationsgrenzen: $a=x_1=0 < x_2=3 < b=4$

2. Die Differenz der Funktionen: $h(x) = f(x)-g(x) = x^2-2x-x = x^2-3x$

Deren Stammfunktion: $H(x) = F(x)-G(x) = \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$

3.
$$A = \left| \int_0^{3} (f(x)-g(x))\,dx \right| + \left| \int_3^{4} (f(x)-g(x))\,dx \right|$$

$$= \left| \left[F(x)-G(x) \right]_0^3 \right| + \left| \left[F(x)-G(x) \right]_3^4 \right| = \left| \left[H(x) \right]_0^3 \right| + \left| \left[H(x) \right]_3^4 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \right| + \left| \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2 \right]_3^4 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2\right) \right| + \left| \left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-\frac{3}{2}\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2\right) \right|$$

$$= \left| \left(9-\frac{27}{2}\right)-0 \right| + \left| \left(\frac{64}{3}-24\right)-\left(9-\frac{27}{2}\right) \right| = \cdots = \frac{9}{2}+\frac{8}{3} = \underline{\frac{43}{6}}$$