Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum

Wir unterscheiden lineares und exponentielles Wachstum:

Wächst eine Anfangsgröße in gleichen Abständen immer um die gleiche Differenz an, so liegt **lineares Wachstum** vor. Beispiel: Telefongebühr pro Minute.

Wächst eine Anfangsgröße in gleichen Abständen immer um den gleichen Faktor an, so liegt **exponentielles Wachstum** vor. Beispiel: Wachstum einer Bakterienkultur pro Tag.

Der Begriff „Abstand" kann ein zeitlicher Abstand (etwa „pro Jahr") oder ein räumlicher Abstand (etwa „pro 100 m Wassertiefe") sein.

Wir bezeichnen den **Start- oder Anfangswert** mit G_0. Das ist die „Menge" etwa zum Zeitpunkt 0 oder der Druck auf Meeresniveau, beispielsweise eine Anfangsmasse m_0 oder bei der Zinseszinsrechnung das Startkapital K_0.

Änderungsrate und Wachstumsfaktor

Das Wachstum oder der Zerfall werden als Prozentsatz p angegeben. Dieser heißt **Änderungsrate**. Wir unterscheiden **Wachstumsrate** und **Zerfallsrate**:

Der **Wachstumsfaktor q** berechnet sich als $\boxed{q := 1 + \frac{p}{100}}$.

Er gibt an, auf das wie-vielfache der Anfangswert nach einer Zeiteinheit angewachsen ist.

Beispiel: Zinssatz $p = 5\,\%$ $\Rightarrow$ Zinsfaktor $q = 1 + \frac{5}{100} = \underline{1{,}05}$

Das Kapital wächst auf das 1,05-fache: 1-mal K_0, + $5\,\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$ Zinsen.

Der **Abnahme-** oder **Zerfallsfaktor q** berechnet sich als $\boxed{q := 1 - \frac{p}{100}}$.

Er gibt an, auf das wie-vielfache der Anfangswert nach einer Zeiteinheit zerfallen ist.

Beispiel: Der Verschmutzungsgrad nimmt um 20 % ab

$\Rightarrow$ Zerfallsfaktor $q = 1 - \frac{20}{100} = \underline{0{,}8}$, d.h. noch 80 % der Verschmutzung von vorher.

Die Formeln

Gegeben sind ein Startwert G_0 und eine Wachstums- oder Zerfallsrate p. Wir suchen die „Menge" nach einer gewissen Anzahl n von Zeit- oder sonstigen Einheiten:

Wachstumsformel: $$\boxed{G_n = G(n) = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = G_0 \cdot q^n}$$

Zerfallsformel: $$\boxed{G_n = G(n) = G_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n = G_0 \cdot q^n}$$

Gesucht: Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt

Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 600 € bei einem Zinssatz von 3% in 4 Jahren an?

$$p = 3 \quad \Rightarrow \quad q = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03, \quad K_0 = 600\text{ €} \quad \Rightarrow \quad K(t) = K_0 \cdot q^t = 600\text{ €} \cdot 1{,}03^t$$

$$\Rightarrow \quad K(4) = 600\text{ €} \cdot 1{,}03^4 \approx \underline{675{,}31\text{ €}}$$

Anmerkung: Der gesuchte Zeitpunkt darf auch eine negative Zahl („vor 2 Jahren“) oder eine rationale Zahl („in zweieinhalb Jahren“) sein.

Gesucht: Wert zum Zeitpunkt 0

Ein radioaktives Material zerfällt in zwei Jahren um 10 Prozent. Wie viele Kilogramm hatte die Probe vor 12 Jahren, wenn sie heute aus 4,25 kg besteht?

Wir erkennen, dass es sich um $n = 12 : 2 = 6$ Zeitspannen handelt.

$$p = 10 \quad \Rightarrow \quad q = 1 - \frac{10}{100} = 0{,}9, \quad m(6) = 4{,}25\text{ kg} \quad \Rightarrow \quad m(n) = m_0 \cdot q^n$$

$$\Leftrightarrow \quad m_0 = m(n) \cdot q^{-n} \quad \Rightarrow \quad m_0 = m(6) \cdot q^{-6} = 4{,}25\text{ kg} \cdot 0{,}9^{-6} \approx \underline{8{,}0\text{ kg}}$$

Gesucht: Zeitspanne

In welcher Zeit bringt ein Kapital von 800 € bei 5 % Verzinsung 50 € Zinsen?

$$p = 5 \quad \Rightarrow \quad q = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05 \quad \Rightarrow \quad K(t) = 800\text{ €} \cdot 1{,}05^t = 800\text{ €} + 50\text{ €} = 850\text{ €}$$

$$\Leftrightarrow \quad 850\text{ €} = 800\text{ €} \cdot 1{,}05^t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{850\text{ €}}{800\text{ €}} = 1{,}05^t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \log_{1{,}05}\left(\frac{850}{800}\right) = \log_{1{,}05}\left(\frac{17}{16}\right) = \frac{\lg(17/16)}{\lg(1{,}05)} \approx \underline{1{,}24\text{ a}} \approx \underline{1\text{ Jahr, }3\text{ Monate}}$$

In wie vielen Jahren verdoppelt sich die Bevölkerung, wenn sie jährlich um 4,5 % wächst?

$$p = 4{,}5 \quad \Rightarrow \quad q = 1 + \frac{4{,}5}{100} = 1{,}045, \quad \mathrm{Bev}(t) = 2 \cdot \mathrm{Bev}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Bev}(t) = \mathrm{Bev}(0) \cdot 1{,}045^t$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Bev}(0) \cdot 1{,}045^t = 2 \cdot \mathrm{Bev}(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}045^t = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \log_{1{,}045}(2) = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}045)} \approx \underline{15{,}75\text{ a}} = \underline{15\text{ Jahre, }9\text{ Monate}}$$

Gesucht: Wachstumsrate p

Welcher Zinssatz erhöht ein Kapital von 500 € in 6 Jahren um 156,04 €?

$$656{,}04\text{ €} = 500\text{ €} \cdot q^6 \quad \Leftrightarrow \quad q^6 = \frac{656{,}04\text{ €}}{500{,}00\text{ €}} \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[6]{\frac{656{,}04}{500{,}00}} = \left(\frac{656{,}04}{500{,}00}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}02$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p = 2}$$