Exponential- und Logarithmusgleichungen

Logarithmus-Definition

Es seien $a, b \in R^{+}$; $a \neq 1$: $b^{x} = a \quad \Leftrightarrow \quad x := \log_{b}(a)$

x ist der Logarithmus von a zur Basis b.

Beispiel: $2^{x} = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x := \log_{2}(32) = 5$, denn: $2^{5} = 32$

Taschenrechner: $x = \log_{b}(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(b)} = \dfrac{\lg(a)}{\lg(b)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

Gleichungen — Beispiel 1

$9 \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2} \cdot 3^{2x} = 3^{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2+2x} = 3^{x+3}$

Exponenten-Vergleich $\Rightarrow \quad 2 + 2x = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = 1}$

$\Rightarrow \quad \underline{L = \{1\}}$

Gleichungen — Beispiel 2

$x = \log_{3}(5) \quad \Leftrightarrow \quad 3^{x} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \log(3^{x}) = \log(5)$

$\Leftrightarrow \quad x \cdot \log(3) = \log(5) \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\log(5)}{\log(3)} \approx \underline{1,46}$

Oder direkt: $x = \log_{3}(5) = \dfrac{\log(5)}{\log(3)} \approx \underline{1,46}$

$\Rightarrow \quad \underline{L = \{1,46\}}$

Gleichungen — Beispiel 3

$2 \cdot 3^{x} = 5^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \lg(2 \cdot 3^{x}) = \lg(5^{x-2}) \quad \Leftrightarrow \quad \lg(2) + \lg(3^{x}) = \lg(5^{x-2})$

$\Leftrightarrow \quad \lg(2) + x \cdot \lg(3) = (x-2) \cdot \lg(5) \quad \Leftrightarrow \quad \lg(2) + x \cdot \lg(3) = x \cdot \lg(5) - 2 \cdot \lg(5)$

$\Leftrightarrow \quad x \cdot \lg(3) - x \cdot \lg(5) = -\lg(2) - 2 \cdot \lg(5) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (\lg(3) - \lg(5)) = -\lg(2) - 2 \cdot \lg(5)$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-\lg(2) - 2 \cdot \lg(5)}{\lg(3) - \lg(5)} \approx \underline{7,6582} \quad \Rightarrow \quad \underline{L = \{7,6582\}}$

Gleichungen — Beispiel 4

$3 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^{x} = -3$ Setze $2^{x} = u > 0$ $\quad 3u^{2} - 6u = -3$

$\Leftrightarrow \quad u^{2} - 2u + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-1)^{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = +1$

$2^{x} = u = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 0} \quad \Rightarrow \quad \underline{L = \{0\}}$