Analysis – Ortskurven von Funktionsscharen

Die Situation

Gegeben sei eine Kurvenschar $f_a : D_{max} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto f_a(x)$.

Außerdem betrachten wir deren Extrema bzw. Hoch- oder Tiefpunkte bzw. Wendestellen. Sowohl die x- als auch die y-Koordinaten sind hier in der Regel vom Parameter a abhängig. Diese Punkte liegen jeweils auf einer Kurve, die als y in Abhängigkeit von x dargestellt werden kann.

Zur Berechnung dieser Kurve gehen wir wie Folgt vor:

1. Wir bestimmen die zur Schar gehörenden gesuchten Punkte, diese haben die Koordinaten $P\left(x(a) / y(a)\right)$, die beide (meistens, aber nicht notwendigerweise immer) vom Parameter a abhängig sind.
2. Wir lösen die Gleichung der x-Koordinate $x(a) = \ldots$ nach dem Parameter a auf.
3. Diesen Wert für den Parameter a, der nun seinerseits von x abhängt, setzen wir in die Gleichung der y-Koordinate $y(a) = \ldots$ ein. Es ergibt sich die gesuchte Funktionsgleichung der Ortskurve $y(x) = \ldots$, die nur noch von x abhängt, nicht mehr von a.

Beispiel 1 (Abitur Saarland 1989)

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a : D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{2x+a}{(x+1)^2}; \quad a \in \mathbb{R}$.

Wir bestimmen die Gleichung der Kurve, auf der alle Extrempunkte liegen.

Es ergeben sich die Extrempunkte $E\left(1-a \,/\, \frac{1}{2-a}\right) = \left(x(a) / y(a)\right)$.

Es ist: $x = 1-a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1-x$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2-a} = \frac{1}{2-(1-x)} = \frac{1}{2-1+x} = \frac{1}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{y = \frac{1}{x+1}}$$

Beispiel 2 (Abitur Saarland 2001)

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \to a \cdot (ax+1) \cdot e^{-ax} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}^+$.

Wir suchen die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen:

Die Kurvendiskussion liefert uns die gesuchten Wendepunkte in Abhängigkeit des Parameters a: $W\left(\frac{1}{a} \,/\, \frac{2a}{e}\right) = \left(x(a) / y(a)\right)$.

Wir lösen die Gleichung für die x-Koordinate nach dem Parameter a auf:

$$x = \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{x}.$$

Diesen Wert setzen wir in die Gleichung für die y-Koordinate ein, und bekommen die gesuchte Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Schar liegen:

$$y = \frac{2a}{e} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{e} = \frac{2}{e \cdot x} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{y = \frac{2}{e \cdot x}}$$