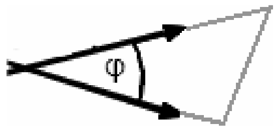
Analytische Geometrie: Schnittwinkel

Sofern die Richtung der Vektoren wichtig ist (etwa bei den Innenwinkeln einer ebenen Figur), berechnen wir den **<u>Schnittwinkel zweier Richtungsvektoren</u>** (etwa im Dreieck) mit der Formel:

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}}{\left|\overrightarrow{u_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_2}\right|}}$$



Die **folgende Situation** setzen wir für die Berechnung von Schnittwinkeln **<u>zwischen Geraden und Ebenen</u>** voraus:

Gegeben seien Geraden: $g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{a_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{u_1}$ und $g_2 : \vec{x} = \overrightarrow{a_2} + \mu \cdot \overrightarrow{u_2}$

und Ebenen in <u>Normalenform</u>: $e_1 : \overrightarrow{n_1} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_1}\right) = 0$ und $e_2 : \overrightarrow{n_2} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_2}\right) = 0$.

(<u>Gegebenenfalls</u> wandeln wir eine Ebene aus ihrer Parameter- in ihre Normalenform um:

$$e : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} \quad \text{und} \quad e : \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0 \quad)$$

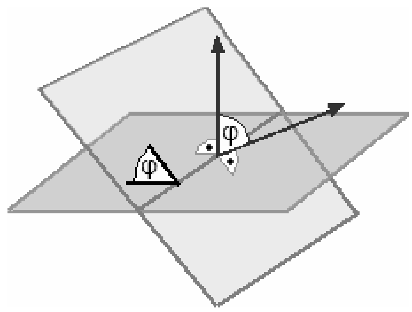
Sofern wir keine „Richtung“ zu beachten haben, bilden zwei sich schneidende „Objekte“ immer zwei Paar von Scheitelwinkel (die sich dann jeweils auf 180° ergänzen).
Den **<u>Schnittwinkel</u>** definieren wir als den <u>kleineren</u> der beiden Winkel.

Für den **<u>Schnittwinkel zweier Geraden</u>** gilt, sofern sie sich schneiden:

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\left|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_2}\right|}}$$

Für den **<u>Schnittwinkel zweier Ebenen</u>** gilt, sofern sie sich schneiden:

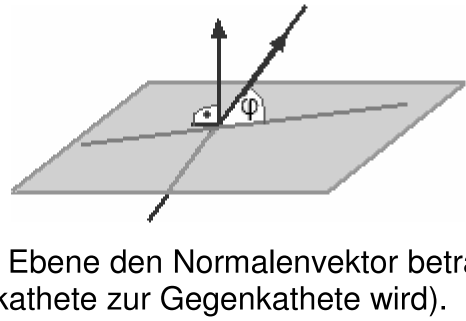
$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}}$$



Im Falle einer **<u>Geraden</u>** mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$, die eine **<u>Ebene</u>** mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ schneidet, definieren wir als Schnittwinkel den Schnittwinkel, den die Gerade mit ihrer Projektion auf die Ebene bildet.

Für den **<u>Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene</u>** gilt, sofern sie sich schneiden:

$$\boxed{\sin(\varphi) = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}}$$



Hier haben wir den Sinuswert benutzt, da wir bei der Ebene den Normalenvektor betrachten, der senkrecht auf der Ebene steht (und somit die Ankathete zur Gegenkathete wird).

Beispiele:

a) Für den Schnittwinkel der (sich im berechneten Schnittpunkt $S(-7/6/3)$ schneidenden) Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}\right|}{\left|\vec{u_1}\right| \cdot \left|\vec{u_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|-12+15-2\right|}{\sqrt{16+9+4} \cdot \sqrt{9+25+1}} = \frac{1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{35}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{35}}\right) \approx \underline{88{,}2°}$$

b) Für die sich schneidenden Ebenen $e_1: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -6$ und $e_2: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 15$ gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|-2-2+1\right|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{\left|-3\right|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{60°}$$

c) Die Ebene $e: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneiden sich, für den Schnittwinkel gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|6-3-2\right|}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{9+1+4}} = \frac{\left|1\right|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{14}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) \approx \underline{4{,}1°}$$