Analytische Geometrie: Lagebeziehungen zwischen Geraden

Die Situation

Für die Lage zweier Geraden g_1 und g_2 im Anschauungsraum R^3 gibt es <u>vier</u> Möglichkeiten:

- Echt parallel $g_1 \parallel g_2$
- Identisch $g_1 = g_2$ (die dann auch „parallel", aber eben nicht „echt parallel" sind)
- Schneiden $g_1 \cap g_2 = \{S\}$ (Schnittpunkt)
- Windschief $g_1 \cap g_2 = \{\ \}$ (diese Möglichkeit gibt es in der Ebene, also im R^2, <u>nicht</u>)

Der Algorithmus

Gegeben sind die Geraden: $g_1: \vec{x} = \vec{a_1} + \lambda \cdot \vec{u_1}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{a_2} + \mu \cdot \vec{u_2}$

Falls: $\vec{u_1} = c \cdot \vec{u_2}$ mit $c \in R \setminus \{0\}$ *(d.h. kollinear, linear abhängig, parallel)*

Dann: *(echt parallel oder gleich)*

Punktprobe $\vec{a_2} \in g_1$ oder $\vec{a_1} \in g_2$ durch Einsetzen

$\Rightarrow$ <u>Drei</u> Gleichungen mit <u>einer</u> Unbekannten λ bzw. μ *(hier steckt Arbeit drin)*.

Falls: Gleichungssystem lösbar, also eindeutiges λ bzw. μ gefunden,

Dann: $\underline{g_1 = g_2}$ *(identisch)*

Sonst: $\underline{g_1 \parallel g_2}$ *(echt parallel)*

Sonst: *(Schnittpunkt oder windschief)*

Gleichsetzen $g_1 = g_2$ $\Rightarrow$ $\vec{a_1} + \lambda \cdot \vec{u_1} = \vec{a_2} + \mu \cdot \vec{u_2}$

$\Rightarrow$ <u>Drei</u> Gleichungen mit <u>zwei</u> Unbekannten λ und μ *(hier steckt Arbeit drin)*.

Falls: Gleichungssystem lösbar, also eindeutige λ <u>und</u> μ gefunden

Dann: $\underline{g_1 \cap g_2 = \{S\}}$ *(Schnittpunkt)*

Sonst: $\underline{g_1 \cap g_2 = \{\ \}}$ *(windschief)*

Falls wir die *Existenz* eines **<u>Schnittpunktes</u>** S gezeigt haben, *berechnen* wir diesen durch das Einsetzen des gefundenen λ oder μ in die jeweils passende (!) Geradengleichung:

Also: $\vec{s} = \vec{a_1} + \lambda \cdot \vec{u_1}$ oder $\vec{s} = \vec{a_2} + \mu \cdot \vec{u_2}$.

Beispiele

1. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wir erkennen, dass die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ <u>keine</u> Vielfachen voneinander sind. Die Geraden sind also nicht parallel, erst recht nicht identisch.
Wir prüfen durch Gleichsetzen, ob sie sich schneiden oder ob sie windschief sind:

$$\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\11\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$

Wichtig:

*Beim Gleichsetzen müssen **unterschiedliche** Parameter λ und μ benutzt werden.*

Das Gleichungssystem lösen wir, es ergeben sich: $\mu=-1$ und $\lambda=-1$.

Die Kontrolle mit der dritten Gleichung ergibt eine wahre Aussage.
Es folgt, dass sich beide Geraden schneiden.

Der Schnittpunkt: Entweder $\lambda=-1$ in g einsetzen oder $\mu=-1$ in h einsetzen:

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11+4\\9-3\\1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\6\\3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \underline{S\left(-7\,/\,6\,/\,3\right)}$$

2. $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\2\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$

Wir erkennen, dass die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind.
Wir prüfen durch Gleichsetzen, ob sie sich schneiden oder ob sie windschief sind:

$$\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem lösen wir, es ergeben sich: $\mu=1$ und $\lambda=-1$.

Die Kontrolle mit der dritten Gleichung ergibt eine falsche Aussage.
Die beiden Geraden schneiden sich nicht, sie sind windschief.

3. $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5{,}5\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}13\\-2\\14\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-6\\4{,}5\\-9\end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander: $\begin{pmatrix}-6\\4{,}5\\-9\end{pmatrix}=-1{,}5\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}$

Die Geraden sind also mindestens parallel. Da auch noch Gleichheit möglich ist, prüfen wir, ob der Aufpunkt $A_g\left(3\,/\,5{,}5\,/\,-1\right)$ der Geraden g auf der Geraden h liegt.

Punktprobe: Existiert $\mu\in R$ so, dass gilt: $\overrightarrow{a_g}=\begin{pmatrix}3\\5{,}5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-2\\14\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-6\\4{,}5\\-9\end{pmatrix}$?

Wir lösen das Gleichungssystem. Aus allen 3 Gleichungen folgt jeweils: $\underline{\mu=\frac{5}{3}}$

$\Rightarrow$ Gleiches μ $\Rightarrow$ $A_g\left(3\,/\,5{,}5\,/\,-1\right)\in h$ $\Rightarrow$ $\underline{g=h}$.

Die beiden Geraden sind also identisch.

Anm.: Ergäben sich unterschiedliche Werte für μ, so wären die Geraden echt parallel.