Analytische Geometrie: Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene

Die Situation

Für die Lage einer Geraden g zu einer Ebene e im R^3 haben wir <u>drei</u> Möglichkeiten:

- Echt parallel $\quad g \parallel e \quad$ Dann gilt $\quad g \cap e = \{\ \}$
- g liegt in e $\quad g \subset e \quad$ bzw. $\quad g \cap e = g$
  (die dann zwar auch „parallel", aber eben nicht „<u>echt</u> parallel" sind)
- g schneidet e $\quad g \cap e = \{S\} \quad$ (Schnittpunkt)

Der Algorithmus – Möglichkeit 1

(falls e in einer <u>Normalenform</u> vorliegt)

Gegeben sind die Gerade in Parameterform: $\quad g: \vec{x} = \overrightarrow{a_g} + \lambda \cdot \vec{u}$

und die Ebene in **Normalenform** $\quad e: \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{a_e}\right) = 0$.

Falls: $\quad \vec{u} \perp \vec{n} \quad$ also $\quad \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

(d.h. Richtungsvektor der Geraden steht senkrecht auf Normalenvektor der Ebene)

Dann: *(echt parallel oder g in e)*

Punktprobe $\quad A_g \in e \quad$ durch Einsetzen von $\quad \vec{x} = \overrightarrow{a_g} \quad$ in e

(oder $\quad A_e \in g \quad$ durch Einsetzen von $\quad \vec{x} = \overrightarrow{a_e} \quad$ in g).

Falls: Ergebnis der Punktprobe positiv
Dann: $\underline{g \subset e}$ bzw. $g \cap e = g$ *(g liegt in e)*

Sonst: $\underline{g \parallel e}$ *(echt parallel)*

Sonst: *(g schneidet e)*

$\underline{g \cap e = \{S\}}$

Falls wir die *Existenz* eines **<u>Schnittpunktes</u>** S gezeigt haben, *berechnen* wir diesen durch das Einsetzen der Geradengleichung $\vec{s} = \overrightarrow{a_g} + \lambda \cdot \vec{u}$ in die Ebenengleichung $\vec{n} \cdot \left(\vec{s} - \overrightarrow{a_e}\right) = 0$.

Der Algorithmus – Möglichkeit 2

(falls e in <u>Punktrichtungsform</u> vorliegt, die wir nicht umformen wollen)

Gegeben sind die Gerade in Parameterform: $\quad g: \vec{x} = \overrightarrow{a_g} + \lambda \cdot \vec{u}$

und die Ebene in **Punktrichtungsform** (Parameterform): $\quad e: \vec{x} = \overrightarrow{a_e} + \mu \cdot \overrightarrow{v_1} + \upsilon \cdot \overrightarrow{v_2}$

Wir setzen g und e gleich, es ergibt sich ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen in den 3 Variablen λ, μ, υ (wobei wir beachten, dass wir <u>3 unterschiedliche Parameter</u> verwenden).

Wir lösen das Gleichungssystem (hier haben wir Arbeit) und haben die Möglichkeiten:

- Eindeutig lösbar $\Rightarrow$ $\underline{g \cap e = \{S\}}$ *(g schneidet e)*
- Unendlich viele Lösungen $\Rightarrow$ $\underline{g \subset e}$ *(g liegt in e)*
- Keine Lösung $\Rightarrow$ $\underline{g \parallel e}$ *(echt parallel)*

Den Schnittpunkt S berechnen wir ggfs. durch Einsetzen von λ in die Geradengleichung.

Beispiele

a) $e: \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 4 = 0$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt (Möglichkeit 1): $\overrightarrow{n_e} \cdot \overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = -8 \neq 0$

$\Rightarrow$ Vektoren <u>nicht</u> senkrecht $\Rightarrow$ Ebene und Gerade <u>nicht</u> parallel.

Schnittpunkt berechnen: g in e einsetzen: $e \cap g$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ... \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda = 2}$$

Dann: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e \cap g = S(6/-3/1)}$

b) $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Schnittpunktansatz (Möglichkeit 2): Wir setzen die Ebene und die Gerade gleich.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Es ergeben sich die <u>eindeutigen</u> Lösungen (hier steckt die Arbeit drin): $\underline{\lambda = -1}$, $\underline{\mu = 2}$ und $\underline{\upsilon = 3}$.

Also: g und e <u>schneiden sich</u>. Schnittpunktberechnung durch Einsetzen von υ in g:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3 \\ 0+0 \\ -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e \cap g = S(9/0/2)}$$

c) $e: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 3 = 0$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt (Möglichkeit 1): $\overrightarrow{n_e} \cdot \overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \cdots = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_e} \perp \overrightarrow{u_g} \Rightarrow$ Ebene und Gerade sind <u>parallel</u>.

Es bleibt die Frage, ob g <u>in</u> e liegt oder ob sie <u>echt</u> parallel sind.

Punktprobe: Einsetzen des Aufpunktes der Geraden in die Ebenengleichung:

$\cdots \Rightarrow 8 = 0$, <u>falsche</u> Aussage $\Rightarrow$ Ebene und Gerade <u>echt parallel</u>: $\underline{e \parallel g}$.