# Analytische Geometrie: Abstände berechnen

## 1 Abstand Punkt - Ebene

Ebene e in Hessescher Normalenform (HNF), dann:

$$\boxed{d(P,e) = \left| \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{p} - d \right|}$$

## 2 Abstand paralleler Ebenen

<u>Möglichkeit 1:</u> Wir nehmen einen beliebigen Punkt (etwa den Aufpunkt) der einen Ebene und berechnen den Abstand dieses Punktes von der anderen Ebene. Dazu setzen wir ihn in die Hessesche Normalenform ein, z.B.:

$$\boxed{d(e_1,e_2) = d(e_1,A_2) = \left| \vec{n}_1^{\,0} \cdot \vec{a}_2 - d_1 \right|}$$

*(oder umgekehrt)*

<u>Möglichkeit 2:</u> Beide Ebenen in Hessescher Normalenform, dann:

Falls $\vec{n}_1^{\,0} = -\vec{n}_2^{\,0}$ (dann liegt der Nullpunkt zwischen $e_1$ und $e_2$),

dann: $\boxed{d(e_1,e_2) = d_1 + d_2}$

Falls $\vec{n}_1^{\,0} = \vec{n}_2^{\,0}$ (dann liegt der Nullpunkt nicht zwischen $e_1$ und $e_2$),

dann: $\boxed{d(e_1,e_2) = \left| d_1 - d_2 \right|}$

## 3 Abstand einer Ebenen zu einer parallelen Geraden

Wir nehmen einen beliebigen Punkt P (etwa den Aufpunkt) der Geraden und berechnen den Abstand dieses Punktes von der Ebene. Dazu setzen wir P in die HNF der Ebene ein:

$$\boxed{d(g,e) = d(P,e) = \left| \vec{n}^{\,0} \cdot \vec{p} - d \right|}$$

Es gilt: $e \parallel g \iff \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

## 4 Abstand Punkt P zu Gerade g

Gegeben sind der Punkt P und die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

1. Aufstellen der Punkt-Normalen-Gleichung (PNG) der **<u>Hilfsebene</u>** e durch den gegebenen Punkt P, senkrecht zur Geraden: $e: \vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$.
2. Berechnen des **<u>Schnittpunktes</u>** (**<u>Lotfußpunktes</u>**) L von g und e durch Einsetzen der Geradengleichung von g in die Ebenengleichung von e.
3. Der gesuchte **<u>Abstand</u>** ist der Abstand der Punkte P und L:

$$\boxed{d(P,g) = d(P,L) = \left| \vec{l} - \vec{p} \right|}$$

## 5 *Abstand paralleler Geraden*

Es seien gegeben: $g_1:\ \vec{x} = \vec{a_1} + \lambda \cdot \vec{u_1}$ und $g_2:\ \vec{x} = \vec{a_2} + \mu \cdot \vec{u_2}$.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt (etwa den Aufpunkt) der einen Geraden und berechnen den Abstand dieses Punktes zu der anderen Geraden (also Punkt – Gerade, siehe 4):

1. Aufstellen der Punkt-Normalen-Gleichung (PNG) der **<u>Hilfsebene</u>** e durch den Aufpunkt $A_1$ der ersten Geraden $g_1$, senkrecht zur zweiten Geraden $g_2$ (der Richtungsvektor wird zum Normalenvektor). [e ist dann auch senkrecht zu $g_1$]
   $e:\ \vec{u_2} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a_1}\right) = 0$
2. Berechnen des **<u>Schnittpunktes</u>** (**<u>Lotfußpunktes</u>**) L von $g_2$ und e durch Einsetzen der Geradengleichung von $g_2$ in die Ebenengleichung von e.
3. Der gesuchte **<u>Abstand</u>** ist der Abstand der Punkte $A_1$ und L.

$$\boxed{d(g_1, g_2) = d(A_1, L) = \left|\vec{l} - \vec{a_1}\right|}$$

*Die Rollen der beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ können natürlich auch getauscht werden.*

---

## 6 *Abstand windschiefer Geraden*

Es seien gegeben: $g_1:\ \vec{x} = \vec{a_1} + \lambda \cdot \vec{u_1}$ und $g_2:\ \vec{x} = \vec{a_2} + \mu \cdot \vec{u_2}$.

<u>Möglichkeit 1:</u>

Es gilt: $$\boxed{d(g_1, g_2) = \left|\left(\vec{u_1} \times \vec{u_2}\right)^0 \cdot \left(\vec{a_2} - \vec{a_1}\right)\right|}$$

<u>Möglichkeit 2:</u>

1. **Hilfsebene** e bestimmen, die $g_2$ enthält und parallel zu $g_1$ verläuft:
   In Normalenform mit $\vec{n} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$: $e:\ \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a_2}\right) = 0$
2. Lotgerade von $A_1$ auf e bestimmen: $l:\ \vec{x} = \vec{a_1} + \nu \cdot \vec{n}$
   **Lotfußpunkt** L von $A_1$ auf e berechnen durch Einsetzen von l in e in Normalenform.
3. Der gesuchte **Abstand** ist die Länge des Lots zwischen Lotaufpunkt und Lotfußpunkt:

$$\boxed{d(g_1, g_2) = d(A_1, L) = \left|\vec{l} - \vec{a_1}\right|}$$

Im Schritt 2 können wir die Berechnung des Lotfußpunktes beenden, wenn wir „$\nu$“ ausgerechnet haben. Dies genügt vollkommen, L selbst ist nicht notwendig):

Es gilt: $$\boxed{d(g_1, g_2) = \left|\nu \cdot \vec{n}\right|}$$

Der Aufpunkt der einen Gerade benutzen wir für die Hilfsebene, der Aufpunkt der anderen Geraden für die Lotgerade.

*Die Rollen der beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ können in beiden Fällen auch getauscht werden.*

---