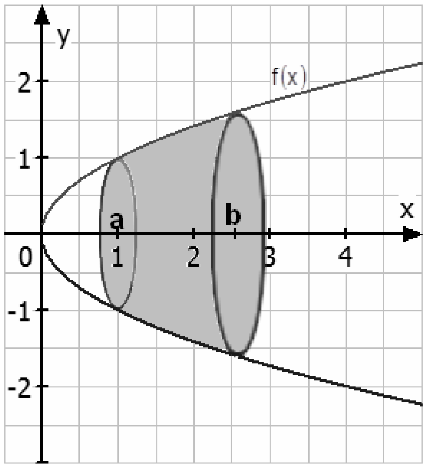
Volumenberechnungen mit Integralen: Rotationskörper

Volumenberechnung bei Rotation um die x-Achse

Für das Volumen des Drehkörpers / Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Graph einer stetigen Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a;b]$ um die x-Achse rotiert, gilt:

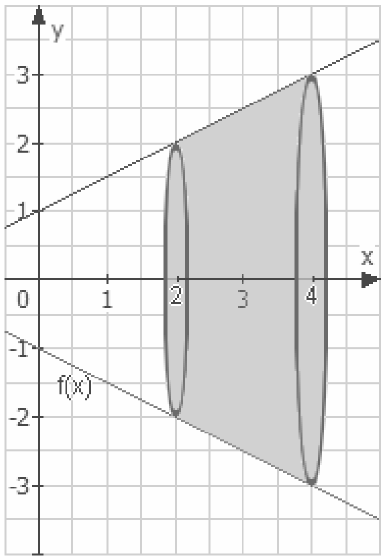
$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$



Anmerkungen:

- Die Grenzen a und b dürfen auch Nullstellen des Graphen sein.
- Der Graph darf auch auf beiden Seiten der x-Achse verlaufen.
- Wir benötigen die Stammfunktion der quadrierten Funktion, **nicht** die quadrierte Stammfunktion.

Beispiel:



Gegeben: $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1; \qquad I = [\,2;4\,]$

Deren Quadrat: $h(x) = (f(x))^2 = \left(-\frac{1}{2}x - 1\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

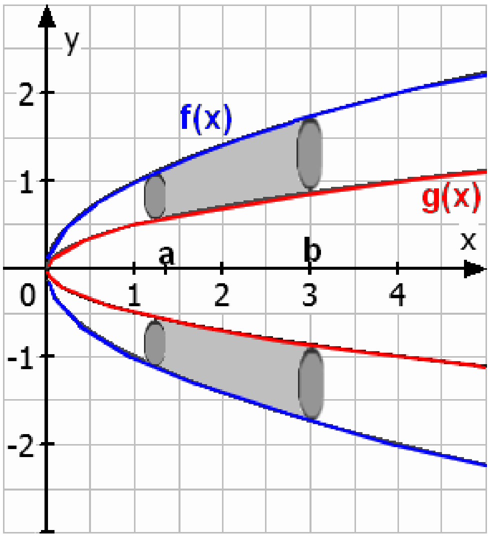
Die Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

Das Volumen:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx \qquad = \pi \cdot \int_a^b h(x) \, dx \\
&= \pi \cdot [\,H(x)\,]_a^b \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_2^4 \\
&= \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{12} \cdot 4^3 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2\right)\right) \\
&= \cdots \\
&= \underline{\frac{38}{3} \cdot \pi \, (VE)} \\
&\approx \underline{39{,}79 \, (VE)}
\end{aligned}$$

Volumenberechnung bei Rotation um die x-Achse zwischen zwei Graphen

Für das Volumen des Drehkörpers / Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen zweier stetiger Funktion $f(x)$ und $g(x)$ mit $f \geq g \geq 0$ über einem Intervall $[a;b]$ um die x-Achse rotiert, gilt:

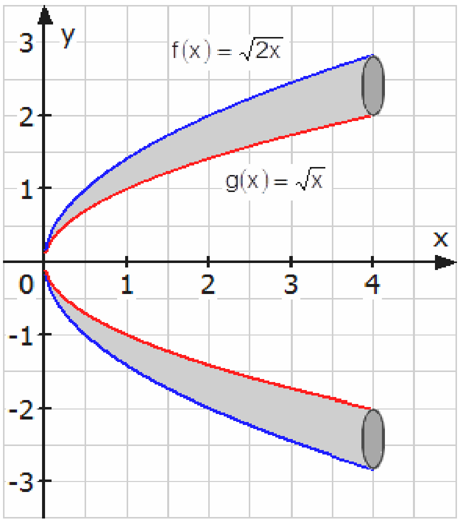


$$\boxed{V = V_f - V_g = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx}$$

Anmerkungen:

- Die Grenzen a und b dürfen auch Schnittpunkte der Graphen sein.
- Die Bedingung $f \geq g \geq 0$ ist zu beachten. gegebenenfalls müssen wir mehrere Intervalle, also mehrere Integrale betrachten.
- Wir benötigen die Stammfunktionen der quadrierten Funktionen, **nicht** die quadrierten Stammfunktionen.

Beispiel:



Es seien $f(x) = \sqrt{2x}$ und $g(x) = \sqrt{x}$

sowie $a = 0$ und $b = 4$ gegeben.

Das zu berechnende Volumen ist die Differenz der beiden Rotationskörper, die entstehen, wenn die Graphen jeweils um die x-Achse rotieren.
Wir ziehen also das kleinere Volumen vom größeren ab:

Wir erkennen, dass für alle $x \geq 0$ gilt:

$$f(x) = \sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \geq \sqrt{x} = g(x).$$

Die 1. Funktion: $f(x) = \sqrt{2x}$ $\Rightarrow$ Deren Quadrat: $(f(x))^2 = h_f(x) = \sqrt{2x}^{\,2} = 2x$

$\Rightarrow$ Deren Stammfkt.: $H_f(x) = x^2$

Die 2. Funktion: $g(x) = \sqrt{x}$ $\Rightarrow$ Deren Quadrat: $(g(x))^2 = h_g(x) = \sqrt{x}^{\,2} = x$

$\Rightarrow$ Deren Stammfkt.: $H_g(x) = \frac{1}{2}x^2$

Das Volumen:
$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx = \pi \cdot \left[H_f(x) - H_g(x)\right]_0^4$$
$$= \pi \cdot \left[x^2 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$$
$$= \pi \cdot (8 - 0) = \underline{8 \cdot \pi \text{ (VE)}} \approx \underline{25{,}13 \text{ (VE)}}$$