Analytische Geometrie: Lagebeziehungen zwischen Ebenen

<u>Die Situation</u>

Für die Lage zweier Ebenen e_1 und e_2 im Anschauungsraum R^3 gibt es <u>drei</u> Möglichkeiten:

- Echt parallel $e_1 \| e_2$
- Identisch $e_1 = e_2$ (die dann auch „parallel", aber eben nicht „echt parallel" sind)
- Schneiden $e_1 \cap e_2 = g_S$ (Schnittgerade)

<u>Der Algorithmus</u>

Gegeben sind zwei Ebenen in <u>Normalenform</u>:

$$e_1: \ \overrightarrow{n_1} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_1}\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad e_2: \ \overrightarrow{n_2} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_2}\right) = 0$$

<u>Gegebenenfalls</u> wandeln wir eine Ebene aus ihrer Parameter- in die Normalenform um:

$$e: \ \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} \qquad \text{und} \qquad e: \ \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{a}\right) = 0$$

Falls: $\overrightarrow{n_1} = c \cdot \overrightarrow{n_2}$ mit $c \in R \setminus \{0\}$ *(d.h. kollinear, linear abhängig, parallel)*

Dann: *(echt parallel oder gleich)*

Punktprobe: $P_2 \in e_1$ oder $P_1 \in e_2$ durch

Einsetzen von $\vec{x} = \overrightarrow{p_2}$ in e_1 oder $\vec{x} = \overrightarrow{p_1}$ in e_2:

Falls: „wahre Aussage"

Dann: $\underline{e_1 = e_2}$ *(identisch)*

Sonst: $\underline{e_1 \| e_2}$ *(echt parallel)*

Sonst: Die beiden Ebenen schneiden sich in einer <u>Schnittgeraden</u>.

Falls wir die *Existenz* einer **<u>Schnittgeraden</u>** g gezeigt haben, *berechnen* wir diese wie Folgt:

Sind beide Ebenen in Normalenform gegeben, formen wir eine in ihre Parameterform um (Hierzu bestimmen wir drei Punkte, die in die in der Ebene liegen – einer ist möglicherweise bereits als Aufpunkt gegeben – und benutzen die Drei-Punkt-Form um zur Parameterform zu gelangen.)

Es seien nun: $e_1: \ \overrightarrow{n_1} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_1}\right) = 0$ und $e_2: \ \vec{x} = \overrightarrow{p_2} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$.

Durch Einsetzen der rechten Seite von e_2 in e_1 $(\vec{x})$ erhalten wir eine Gleichung in den Parametern λ und μ, die wir nach einem der beiden auflösen. Diesen setzen wir wiederum in die Parameterform der Ebene e_2 ein und erhalten die gesuchte Geradengleichung.

<u>Beispiele</u>

1. $e_1: \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 6 = 0$ und $e_2: \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 15 = 0$

Da $\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, sind die Normalenvektoren der beiden Ebenen *Vielfache* voneinander. Daher sind die Ebenen mindestens parallel, eventuell sogar gleich.

Zur Punktprobe „basteln“ wir uns ein Punkt $A_1 \in e_1$ der Ebene e_1 und setzen ihn in die Gleichung der Ebene e_2 ein.

Mit $\underline{x_1 = x_2 = 0}$ folgt $4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2x_3 + 6 = 0$, also $\underline{x_3 = 3}$

Wir testen, ob $A_1\left(0/0/3\right) \overset{?}{\in} e_2$ durch Einsetzen in e_2:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad 0 + 0 + 15 = 15$$

Wir bekommen eine <u>wahre Aussage,</u> also ist $A_1\left(0/0/3\right) \in e_2$.

Die beiden Ebenen sind also <u>identisch</u>: $\underline{e_1 = e_2}$

Anm.: Ergäbe sich eine <u>falsche</u> Aussage, so wären die Ebenen echt parallel.

2. $e_1:\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 - 14 = 0$ und $e_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Normalenvektoren $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind <u>keine</u> Vielfachen voneinander ($\vec{n_2}$ haben wir mit dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren berechnet). Die Ebenen schneiden sich also in einer Geraden. Um diese zu berechnen, setzen wir die Parametergleichung von e_2 in die Normalengleichung von e_1 ein:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(8 + 0 - 3\right) + \mu \cdot \left(16 + 25 + 4\right) + \nu \cdot \left(4 - 5 + 1\right) - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 + 45 \cdot \mu + 0 \cdot \nu - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 45\mu = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

Diesen Parameterwert setzen wir in die Parametergleichung der Ebene e_2 ein:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{=\mu} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ -1 \\ 11/5 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die gesuchte Schnittgerade: $\underline{g_S:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ -1 \\ 11/5 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.